Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 12 -19/10 (versión preliminar)

1 Una línea directa al infinito[1]

Tal como anticipamos, el estudio de problemas de la forma $Lx = N(x)$ no se limita a la dimensión finita: por eso, llegó el momento de meternos con espacios más generales. Por ejemplo, el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

se transforma en la anterior ecuación si llamamos $Lu := u''$ y $N(u) = f(\cdot, u)$. Notemos que en este caso se lo puede pensar como un problema de punto fijo en $C([0,T])$, ya que L se puede invertir: en efecto, dada $\varphi \in C([0,T])$ existe una única u tal que $Lu = \varphi$. Esto se puede verificar por integración directa:

$$u'(t) = c + \int_0^t \varphi(s)\,ds$$

$$u(t) = ct + \int_0^t \int_0^s \varphi(r)\,dr\,ds$$

$$u(T) = 0 \implies c = -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^s \varphi(r)\,dr\,ds.$$

De esta forma, el problema anterior se escribe como un problema de punto fijo:

$$u = L^{-1}N(u).$$

Observación 1.1 *Como se ve en la práctica* 0*, la solución del problema lineal para cualquier* φ *puede escribirse en la forma*

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

donde G *es la llamada función de Green asociada al problema. Luego, la ecuación no lineal presenta el siguiente aspecto:*

$$u(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, u(s))\,ds. \tag{1}$$

[1]Ante la ausencia asombrosa de tangos que se refieran al infinito (dejando de lado el que habla de "esas cosas que nunca se alcanzan"), tuvimos que optar por una antigua canción del rock vernáculo. Aunque el lector entendido podrá observar que, en el fondo, no traicionamos del todo nuestro espíritu tanguero.

Pero comencemos por el principio: antes de Dirichlet, uno debería ver lo que ocurre con el primer resultado de ecuaciones diferenciales que uno aprende en la vida (junto con todo lo bueno y todo lo malo, del beso que se compra y el beso que se da): el problema de valores iniciales

$$X'(t) = F(t, X(t)), \qquad X(t_0) = X_0$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz en X, para cierto abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que contiene al punto (t_0, X_0). Como sabemos, esto también se escribe como un problema de punto fijo

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds := TX(t)$$

lo que nos da una primera idea sobre el espacio E que conviene elegir: vamos a tomar un subconjunto de $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$, aunque necesitamos, en primer lugar, que T esté definido. Y ya que estamos, ¿por qué no pedir de una vez que E sea invariante, es decir, que $T(E) \subset E$? Una manera de lograr esto es fijar en primer lugar $\hat{\delta}, R > 0$ tales que $C := [t_0 - \hat{\delta}, t_0 + \hat{\delta}] \times \overline{B_R(X_0)} \subset \Omega$ y, como C es compacto, podemos tomar $M := \|F|_C\|_\infty$. Nuestro conjunto E va a ser entonces la bola de radio R de $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$: si $X \in E$ entonces vale

$$|X(t) - X_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds \right| \leq M\delta,$$

así que si tomamos $\delta \leq \min\{\hat{\delta}, \frac{R}{M}\}$ entonces $T(E) \subset E$. Llegado este punto, uno podría sentirse satisfecho y confiar en que un teorema similar al de Brouwer pondría ya los puntos (fijos) sobre las íes. Y tal es, en efecto, el caso, aunque hay que tener cuidado, puesto que Brouwer no se extiende así nomás a espacios de dimensión infinita; es un tema que nos ocupará próximamente, cuando veamos el teorema de Schauder. Por ahora, nuestro objetivo es más modesto y se apoya en el hecho de que F no es solamente continua sino que además cumple la condición de Lipschitz, que será clave para darle a la demostración un toque único (mejor dicho, de unicidad). Esto es lo que se observa a partir del método de Picard, que inspiró a Banach para presentar en su tesis doctoral, allá por 1920, un resultado más general: el teorema de la contracción. La idea consiste, simplemente, en observar que si δ es suficientemente chico entonces T es globalmente Lipschitz con constante menor que $L < 1$, lo que en criollo se llama una contracción:

$$d(T(x), T(y)) \leq L d(x, y), \qquad x, y \in E.$$

Teorema 1.2 *Sea E un espacio métrico completo y sea $T : E \to E$ una contracción. Entonces existe un único $x \in E$ tal que $T(x) = x$.*

<u>*Demostración*</u>: La prueba es sencilla y tiene la ventaja de transformarse en un (algo tosco) método numérico: precisamente el método de Picard, que converge

linealmente a la solución. Al mejor modo Aquiles y la tortuga, tomamos $x_0 \in E$ y definimos $x_{n+1} = Tx_n$. Es claro que $d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0)$ y luego

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=n+j}^{n+k-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{n+k-1} L^j \leq d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L},$$

lo que prueba que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Luego x_n converge a cierto x y vale $T(x_n) = x_{n+1} \to x$, de donde $T(x) = x$. La unicidad es también clara ya que si y es otro punto fijo vale $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y)$. $\square$

Observación 1.3 *Una demostración algo diferente, debida a Palais, es la que vimos en nuestro repaso del método de Picard. Se basa en observar que vale la desigualdad "cuadrangular"*

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + d(x_{n+k+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + Ld(x_{n+k}, x_n) + d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

y luego

$$(1-L)d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leq (L^{n+k} + L^n) d(x_1, x_0),$$

es decir:

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{L^{n+k} + L^n}{1-L} d(x_1, x_0).$$

Observación 1.4 *El resultado no vale si se asume la condición más débil de que $d(T(x), T(x)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in E$ distintos. Por ejemplo, la función $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$ cumple la condición pero no tiene puntos fijos. En cambio, si se pide además que el espacio sea compacto, entonces el resultado se recupera en todo su esplendor. Curiosamente, en este último caso T no puede ser estrictamente expansiva: si $T : E \to E$ satisface $d(T(x), T(y)) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in E$ con E compacto, entonces T es una isometría.*

En la anterior situación del teorema de existencia y unicidad, la cuestión es clara: una vez que fijamos R y vemos que si δ es chico el conjunto C es invariante, alcanza con mostrar que si achicamos δ un poco más entonces $T : C \to C$ es una contracción. Pero esto es más bien inmediato, ya que

$$\begin{aligned} |TX(t) - TY(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (F(s, X(s)) - F(s, Y(s)))\, ds \right| \\ &\leq \delta L \|X - Y\|_\infty, \end{aligned}$$

de modo que es suficiente pedir $\delta L < 1$. Cabe aclarar que la unicidad que proporciona el teorema de Banach solo sirve para asegurar que no hay otras soluciones en C; la unicidad "posta" se debe -¡cuándo no!- al lema de Gronwall.

A pesar de su sencillez, el teorema de Banach es utilizado en numerosos problemas de contorno; en particular, en cualquier caso que admita la forma $Lx = N(x)$ con L inversible uno puede buscar lleno de esperanzas la constante de Lipschitz que los sueños prometieron a sus ansias. Sin ir muy lejos, para el anterior problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0,$$

con f es Lipschitz en u con constante L. Como dijimos, para cada $v \in C([0,T])$ podemos definir $Tv = u$ la única solución del problema lineal

$$u''(t) = f(t, v(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0,$$

entonces para $v_1, v_2 \in C([0,T])$ resulta

$$\|(Tv_1)'' - (Tv_2)''\|_\infty \leq \max_{0 \leq t \leq T} |f(t, v_1(t)) - f(t, v_2(t))| \leq L\|v_1 - v_2\|_\infty.$$

La pregunta es cómo podemos vincular la norma de $w := Tv_1 - Tv_2$ con la de su derivada segunda, pero se puede acotar a lo bruto de la siguiente manera. En primer lugar, como w se anula en los extremos, entonces podemos escribir w como la integral de su derivada, de modo que

$$\|w\|_\infty \leq \frac{T}{2}\|w'\|_\infty.$$

Quizás resulte extraña la presencia de ese 2 en el denominador, pero ocurre que -brutos, pero no zonzos- podemos integrar desde el extremo que nos quede más cerca. Y para acotar por medio de la derivada segunda podemos usar Rolle:

$$|w'(t)| = \left| \int_{t_0}^t w''(s)\, ds \right| \leq T\|w''\|_\infty.$$

De esta forma, se deduce que

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_\infty \leq \frac{T^2 L}{2}\|v_1 - v_2\|_\infty$$

y el operador resulta una contracción para $L < \frac{2}{T^2}$.

Digresión: eran otras cotas, mejores cotas las nuestras

La cuenta anterior nos deja toda la sospecha de que la cota 'bruta' puede mejorarse. Por ejemplo, si pensamos en la representación (1), podemos definir el operador de punto fijo $T : C([0,T]) \to C([0,T])$ de manera directa:

$$Tu(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, u(s))\, ds.$$

Entonces resulta

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \int_0^T |G(t,s)| L |u(s) - v(s)|\, ds$$

$$\leq L\|u-v\|_\infty \int_0^T |G(t,s)|\,ds.$$

De esta forma,

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq L\gamma \|u-v\|_\infty,$$

donde $\gamma := \sup_{t\in[0,T]} \int_0^T |G(t,s)|\,ds$. Pero para cuantificar la condición $L < \frac{1}{\gamma}$, tenemos que acotar la función de Green. Eso no es muy difícil en este caso, porque es fácil comprobar (ver práctica 0) que:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t}{T}(T-s) & t \leq s \\ -\frac{s}{T}(T-t) & t > s. \end{cases}$$

Luego vale

$$\int_0^T |G(t,s)|\,ds = \frac{t(T-t)}{2},$$

de modo que $\gamma = \frac{T^2}{8}$, es decir: Green 1, Brutus 0.

Pero cabe volver a preguntar cuán buena es esta nueva cota, ya que nos gustaría pedirle lo menos posible a f. Y la regla más o menos general para obtener cotas buenas y duraderas es la siguiente: si su Banach no lo satisface, pruebe con un Hilbert. En este caso, podemos intentar buscar un punto fijo con el mismo operador de antes, pero ahora definido en $L^2(0,T)$. A la hora de buscar soluciones, la cosa no cambia mucho: un punto fijo va a ser claramente una función continua y entonces es fácil verificar que es de clase C^2. Eso sí, hay que tener un poco de cuidado porque en principio $f(t,u(t))$ podría no ser integrable y arruinarnos el estofado, aunque en este caso nos salva Lipschitz: en efecto, vale

$$|f(t,u(t))| \leq |f(t,0)| + L|u(t)|$$

que es integrable. Así que el operador $T : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$ está bien definido y, para las cotas, tenemos un truco bastante elegante que alguna vez ya hemos usado: si w se anula en los extremos, entonces

$$\int_0^T w'(t)^2\,dt = -\int_0^T w(t)w''(t)\,dt \leq \|w\|_{L^2}\|w''\|_{L^2}.$$

Pero ahora viene el detalle clave, la famosa desigualdad de Poincaré, que en esta situación dice:

$$\|w\|_{L^2} \leq \frac{T}{\pi}\|w'\|_{L^2}.$$

De esta forma, vale

$$\|w'\|_{L^2}^2 \leq \frac{T}{\pi}\|w'\|_{L^2}\|w''\|_{L^2},$$

de donde

$$\|w\|_{L^2} \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \|w''\|_{L^2}.$$

Esto quiere decir que alcanza con pedir $L < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$, lo que mejora la cota anterior: Poincaré 2, Green 1. Debemos reconocer, eso sí, que hicimos una pequeña trampita pues en realidad usamos (sin mencionarlo) el espacio de Sobolev $H^2(0,T)$: al aplicar el operador a un elemento de L^2 que no es una función continua, lo que resulta es una función que no es dos veces derivable en el sentido clásico. Sin embargo, es fácil ver que todo funciona bien y, si uno es muy purista, en realidad se puede evitar por completo el uso de H^2. Las cuentas anteriores mostrarían, en principio, que

$$\|Tu - Tv\|_{L^2} \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 L\|u - v\|_{L^2}$$

para cualquier par de funciones u, v continuas. Pero el operador T es continuo y $C[0,T]$ es denso, así que la desigualdad vale para $u, v \in L^2(0,T)$.

No está de más señalar que la cota de la desigualdad de Poincaré es óptima, en el sentido de que es la mejor entre todas aquellas constantes c tales que

$$\|w\|_{L^2} \leq c\|w'\|_{L^2}$$

para toda w que se anule en los extremos. Y esto se debe a un hecho que es fácil demostrar empleando algunos teoremas básicos del análisis funcional: el valor

$$\lambda_1 := \min_{w(0)=w(T)=0,\, w\neq 0} \frac{\|w'\|_{L^2}^2}{\|w\|_{L^2}^2}$$

se alcanza y es positivo. Por supuesto, habría que especificar en qué espacio estamos trabajando, pero podemos hacer caso omiso a estos detalles y hacer la cuenta. En primer lugar, es claro que alcanza con mirar, sobre todas las funciones que se anulan en los extremos, el mínimo valor de $\|w'\|_{L^2}^2$ sujeto a la restricción $\|w\|_{L^2}^2 = 1$, es decir: un problema de extremos ligados. Esto se puede estudiar, claro está, empleando los famosos multiplicadores de Lagrange, que gracias al teorema de la función implícita pronto podremos ver en su versión general para espacios de dimensión infinita. Pero en este caso no hace falta llegar a tanto: supongamos que dicho mínimo se alcanza para cierta función u tal que $\|u\|_{L^2} = 1$, entonces para cualquier v que no sea múltiplo de u y todo $s \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{\|u' + sv'\|_{L^2}^2}{\|u + sv\|_{L^2}^2} \geq \|u'\|_{L^2}^2 = \lambda_1$$

Esto quiere decir que

$$\lambda_1 + 2s\langle u', v'\rangle + s^2\|v'\|_{L^2}^2 \geq \lambda_1(1 + 2s\langle u, v\rangle + s^2\|v\|_{L^2}^2)$$

$$2s\langle u', v'\rangle + s^2\|v'\|_{L^2}^2 \geq \lambda_1(2s\langle u, v\rangle + s^2\|v\|_{L^2}^2).$$

Pero qué cosas hermano, que tienen las parábolas: si una función $As^2 + Bs$ es mayor o igual que 0 para todo s, entonces $A \geq 0$ y $B = 0$, de modo que

$$\langle u', v'\rangle = \lambda_1\langle u, v\rangle$$

para todo v, es decir:

$$\int_0^T u'(t)v'(t)\,dt = \lambda_1 \int_0^T u(t)v(t)\,dt$$

e integrando por partes

$$-\int_0^T u''(t)v(t)\,dt = \lambda_1 \int_0^T u(t)v(t)\,dt.$$

Pero, ¿no dijimos para todo v? Esto significa entonces que

$$-u''(t) = \lambda_1 u(t),$$

y concluimos que λ_1 es un autovalor para la condición $u(0) = u(T) = 0$. Pero no cualquiera, ya que si v es autofunción con autovalor λ, entonces $\|v'\|^2 = \lambda\|v\|^2$, es decir: $\lambda \leq \lambda_1$. Concretamente, lo que buscamos es, precisa y sencillamente, el primer autovalor. Y esto es fácil, porque la autofunción es de la pinta $u(t) = \alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1} t)$, de donde se obtiene $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$.

Si alguien se quedó con ganas de una interpretación geométrica, vale el siguiente comentario informal: si, como antes, u es un mínimo de la funcional $I(u) := \|u'\|_{L^2}^2$ restringido a la esfera unitaria de $L^2(0,T)$, entonces para cualquier $\varphi \perp u$ podemos tomar la curva

$$c(s) := \frac{u + s\varphi}{\|u + s\varphi\|_{L^2}}$$

que en 0 pasa por u y verifica $c'(0) = \varphi$. Como $I \circ c$ alcanza un mínimo en $s = 0$, eso significa que $(I \circ c)'(0) = 0$ y, en consecuencia, $DI(u)(\varphi) = 0$. En otras palabras, $DI(u)$ se anula sobre $\{u\}^\perp$, el espacio tangente a la esfera en u. Además, cualquier v se escribe en la forma $\varphi + sv$, donde $\varphi \perp u$ y $s = \langle u, v\rangle$, vale decir:

$$DI(u)(v) = sDI(u)(u) = DI(u)(u)\langle u, v\rangle$$

para todo v. Esto ya nos pone en la pista de quién va a ser λ_1 y la relación con los multiplicadores de Lagrange. Pero claro, todo esto vendrá una vez que veamos algo de diferenciación.

2 Tarde comprobé que mi ilusión...

Al cabo de unas cuantas clases y algunos amagues, podemos por fin dar cuenta de algunas nociones básicas de la teoría de ecuaciones con retardo. Hasta ahora hicimos mención al caso de un retardo discreto

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{2}$$

para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, donde la condición inicial tiene la pinta $x|_{[-\tau,0]} = \varphi$. Pero uno puede imaginar situaciones mucho más generales; por ejemplo -¿por qué no?- muchos retardos

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_k)).$$

En este caso, para poner una condición inicial adecuada, debemos tomar $\tau^* := \max\{\tau_j\}$ y elegir $\varphi \in C([-\tau^*, 0])$. A su vez, estos retardos pueden ser funciones de t o de x. Pero también se puede pensar en situaciones más generales, con retardos *distribuidos*, que en vez de $x(t-\tau)$ tienen términos en forma de convolución:

$$\int_0^\tau k(s)x(t-s)\,ds$$

en donde el núcleo k satisface $\int_0^\tau k(s)\,ds = 1$. Esta situación incluye el caso de un retardo no acotado $\tau = +\infty$, en el que $x'(t)$ depende de toda la historia $\{x(s) : s \leq t\}$.[2] Ante tan variada y florida colección de retardos, es común escribir la ecuación en la forma

$$x'(t) = F(t, x_t),$$

donde $F : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, para algún espacio C apropiado de funciones continuas y x_t denota la función definida por $x_t(s) := x(t+s)$. Con esta notación la condición inicial toma una forma de lo más coqueta:

$$x_0 = \varphi$$

o, más en general,

$$x_{t_0} = \varphi$$

si queremos una condición inicial en cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. Cabe observar que el dato inicial φ siempre pertenece al mismo espacio C, que es precisamente el espacio de fases para este problema.

Observación 2.1 *Lo anterior motiva una observación desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Para una ecuación ordinaria $x'(t) = f(t, x(t))$ con f continua y localmente Lipschitz en x, se define el flujo $\Phi(t, t_0, x_0)$ como el valor en t de la única solución con condición inicial $x(t_0) = x_0$. Esto quiere decir que, para cada instante t, la función Φ describe la evolución del sistema a partir del estado inicial x_0 dado en el instante inicial t_0; la ecuación diferencial no es otra cosa que la ley según la cual evoluciona dicho sistema. Lo mismo vale para una ecuación con retardo, aunque los "estados" no son vectores de $\mathbb{R}^n$ sino elementos de C y las trayectorias son curvas $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to C$ dadas por $\gamma(t) := x_t$.*

Por ejemplo, para la ecuación (2) basta tomar $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y

$$F(t, \phi) := f(t, \phi(0), \phi(-\tau)).$$

Es fácil imaginar cómo conviene tomar F para el caso de muchos retardos discretos. En cambio, para una ecuación con retardo distribuido, por ejemplo

$$x'(t) = -dx(t) + \int_{t-\tau}^{t} k(t-s)x(s)\,ds$$

[2] El que no esté convencido de haber llamado 'más generales' a estos retardos, puede probar de incluir entre los posibles núcleos alguna que otra delta de Dirac.

se puede tomar $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ está por

$$F(\phi) := -d\phi(0) + \int_0^\tau k(s)\phi(-s)\, ds.$$

Las ecuaciones con retardo establecen, en general, una dinámica muy distinta a las ecuaciones ordinarias. O, mejor dicho, una *semi-dinámica*, ya que en realidad solo se resuelven hacia adelante. Esto tiene una explicación muy sencilla: supongamos por ejemplo que queremos resolver la ecuación lineal

$$u'(t) = u(t - \tau)$$

con condición inicial $u|_{[-\tau,0]} = \varphi$. Si queremos encontrar una solución para valores menores que $-\tau$, observemos en primer lugar que la igualdad $u'(t+\tau) = u(t)$ dice que, para $t \in [-2\tau, -\tau]$ vale $u(t) = \varphi'(t + \tau)$. Esto no solo obliga a tomar φ de clase C^1 sino que, además, requiere una condición de compatibilidad: $\varphi'(0) = \varphi(-\tau)$. En resumen, no hay solución para cualquier φ que se nos ocurra poner. En cambio, para adelante podemos movernos alegremente: por ejemplo, para $t \in [0, \tau]$ la ecuación se reduce a $u'(t) = \varphi(t - \tau)$, de modo que $u(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi(s - \tau)\, ds$. Inductivamente, si ya conocemos u para cierto intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$, se la puede extender al intervalo siguiente mediante la fórmula $u(t) = u(\tau n) + \int_{n\tau}^t u(s - \tau)\, ds$.

El ejemplo anterior, así de sencillito, muestra algo que vale en general para retardos discretos: el llamado *método de pasos* (nada que ver con la costurerita de los versos de Carriego). Para hacerlo fácil, consideremos el caso de un solo retardo constante,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$$

donde -ya que estamos- podemos pensar que f está definida en todo el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como la idea es "pegar" soluciones, conviene pensar la condición inicial para cualquier t_0; como dijimos, esto se puede escribir en la forma $x_{t_0} = \varphi$, con $\varphi \in C[-\tau, 0]$.

En tal caso, para $t \in [t_0, t_0 + \tau)$ el problema se reduce a la ecuación ordinaria

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi(t - t_0 - \tau)), \qquad x(t_0) = \varphi(0).$$

Para resolver esto, alcanza con pedir que f sea continua y Lipschitz respecto de la variable x, eso ya garantiza la existencia de una solución definida en cierto intervalo que comienza en t_0. Si tenemos la dicha de que la solución llegue hasta $t_0 + \tau$, entonces repetimos el procedimiento a partir de allí, tomando ahora como dato inicial la función $\varphi(t) = x(t + t_0 + \tau)$.

La unicidad de la solución así definida es clara y, como dijimos, no hizo falta pedir que f sea Lipschitz respecto de la variable que incluye el retardo. También es fácil ver la dependencia continua respecto del dato inicial, tomando la norma usual de $C[-\tau, 0]$. Y también se rescata otro resultado clásico: si la solución x está definida en cierto $[t_0 - \tau, t_0 + \delta)$ y no se puede extender, necesariamente debe 'explotar', es decir, $\|x(t)\| \to \infty$ para $t \to (t_0 + \delta)^-$. Para ver esto, alcanza con aplicar los resultados que ya conocemos: tomando $k = \left[\frac{\delta}{\tau}\right]$, se verifica que x es la (única) solución del sistema de ecuaciones *ordinarias*

$$y'(t) = f(t, y(t), x(t-\tau)), \qquad y(t_0 + k\tau) = x(t_0 + k\tau),$$

que no se puede extender hacia la derecha.

A continuación veremos que la situación es algo diferente en el caso más general $x'(t) = f(t, x_t)$. Supondremos que el retardo es finito, de modo que tomaremos $f : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ continua. Se dice que f es localmente Lipschitz respecto de x si para todo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y todo $M > 0$ existe una constante L tal que

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| \leq L\|\phi - \psi\|_\infty$$

para todo $t \in I$ y todas las funciones $\phi, \psi \in \overline{B_M(0)} \subset C[-\tau, 0]$. Por ejemplo, es fácil verificar (ejercicio) que si f es lineal respecto de x, entonces es globalmente Lipschitz sobre cualquier I.

Vamos a resolver ahora el problema para una condición inicial $x_{t_0} = \varphi$ en el espacio de Banach

$$E := \{x \in C[t_0 - \tau, t_0 + \delta] : x_{t_0} = \varphi\}$$

por medio del operador de punto fijo $\mathcal{T} : E \to E$ dado por

$$\mathcal{T}x(t) := \begin{cases} \varphi(t - t_0) & t \leq t_0 \\ \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds & t > t_0. \end{cases}$$

Puede parecer una tontería, pero conviene aclarar que la integral está bien definida, pues la función $s \mapsto F(s, x_s)$ es continua. Y esto, a su vez, es fácil de verificar usando que x es *uniformemente* continua, lo que hace pensar que, en el caso de retardos infinitos, hay que tener un poco más de cuidado. Pero para retardos finitos, *la commedia è finita*:

Teorema 2.2 *Sea f continua y localmente Lipschitz respecto de x. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$, existe $\delta > 0$ que depende solamente de t_0 y R tal que para toda $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq R$ existe una única solución $x = x(t, \varphi)$ del problema definida en $[t_0 - \tau, t_0 + \delta]$.*

<u>*Demostración*</u>: Veremos que para δ chico existe alguna bola cerrada B del espacio E tal que $\mathcal{T}(B) \subset B$ y además $\mathcal{T} : B \to B$ es una contracción. Por ahora, no importa que δ sea muy bueno: la hora de extender soluciones llegará más adelante. Por eso, podemos por ejemplo, fijar de antemano $\delta \leq \tau$ y $B := \overline{B_{2R}(0)}$, es decir, la bola cerrada de radio $2R$ centrada en 0. Observemos que si $\|x\|_\infty \leq 2R$ entonces para para $t \leq t_0$ es claro que $|\mathcal{T}x(t)| \leq R$ y para $t > t_0$ vale

$$|\mathcal{T}x(t)| \leq |\varphi(0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x_s)|\, ds \leq R + \delta C,$$

donde elegimos C tal que

$$C \geq \sup_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau, \|\psi\|_\infty \leq 2R} |f(t,\psi)|.$$

La pregunta maliciosa es: ¿cómo sabemos que este supremo existe? Esto era una bobada en el caso sin retardo y, sin embargo, cuando la compacidad no está la flor no perfuma: el hecho de que f sea continua no es suficiente para asegurar que es acotada sobre $[t_0, t_0+\tau] \times B$. Pero, como siempre, viene Lipschitz a salvarnos:

$$|f(t,\psi)| \leq |f(t,0)| + \|f(t,0) - f(t,\psi)\|_\infty \leq |f(t,0)| + L\|\psi\|_\infty,$$

donde L es la constante correspondiente al intervalo $I := [t_0, t_0+\tau]$ y $M = 2R$. Así concluye nuestra duda cartesiana, pues felizmente I sigue siendo compacto, de modo que podemos tomar

$$C = \max_{s\in T} |f(s,0)| + 2LR.$$

La cota anterior $\|\mathcal{T}x(t)\| \leq R + \delta C$ nos dice que podemos elegir $\delta \leq \frac{R}{C}$ y, de esta forma, $\|\mathcal{T}x\|_\infty \leq 2R$, es decir, $\mathcal{T}(B) \subset B$. Por otra parte, para $x, y \in B$ se tiene que $\mathcal{T}x(t) = \mathcal{T}y(t)$ si $t \leq t_0$, mientras que para $t > t_0$ vale

$$|\mathcal{T}x(t) - \mathcal{T}y(t)| \leq \int_{t_0}^t |F(s,x_s) - F(s,y_s)|\, ds \leq \int_{t_0}^t L\|x_s - y_s\|_\infty\, ds$$

y entonces

$$\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\|_\infty \leq \delta L\|x-y\|_\infty.$$

Y ahora, sin que haga falta achicar δ resulta que $\mathcal{T}$ es una contracción: en efecto, como $\delta \leq \min\{\tau, \frac{R}{C}\}$ y $C \geq 2RL$, resulta $\delta L \leq \frac{1}{2}$.

Para ver la unicidad de manera general, supongamos que x, y son dos soluciones del problema de valores iniciales para una misma φ, definidas en cierto intervalo $I := [t_0, t_0+\delta]$. Entonces para $t \geq t_0$ vale

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s,x_s) - f(s,y_s)|\, ds \leq L\int_{t_0}^t \|x_s - y_s\|_\infty\, ds$$

donde L es ahora la constante correspondiente al intervalo I y la constante $M := \max\{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\}$.

La desigualdad de Gronwall no se aplica directamente, ya que la función que aparece en el integrando no es la misma que aparece en el término de la izquierda; sin embargo, para $\theta \in [-\tau, 0]$ vale:

$$|x(t+\theta) - y(t+\theta)| \leq L\int_{t_0}^{t+\theta} \|x_s - y_s\|_\infty\, ds \leq L\int_{t_0}^t \|x_s - y_s\|_\infty\, ds.$$

En consecuencia,

$$\|x_s - y_s\|_\infty \leq L\int_{t_0}^t \|x_s - y_s\|_\infty\, ds$$

y ahora sí, Gronwall derecho viejo.

□

La cuenta de la unicidad también sirve para probar la continuidad respecto de la condición inicial, que queda como ejercicio. Y, al igual que en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, los resultados anteriores permiten deducir para toda φ la existencia de un intervalo maximal $I_\varphi = [t_0 - \tau, A)$ sobre el cual $x(\cdot, \varphi)$ está definida y no puede extenderse hacia la derecha. Pero ahora no es posible probar, para $A < \infty$ que necesariamente $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to A^-$. Lo que sí vale, como es de esperar, es que el 'estado' x_t tiende a infinito dentro del espacio de funciones:

Teorema 2.3 *Sea f continua y localmente Lipschitz respecto de x. Supongamos que x es una solución definida en un intervalo acotado $[t_0 - \tau, A)$ que no se puede extender hasta $t = A$, entonces $\|x_t\|_\infty \to \infty$ para $t \to A^-$.*

Demostración: Supongamos que existen $t_n \nearrow A$ y $R > 0$ tales que $\|x_{t_n}\|_\infty \leq R$. Fijamos $I = [t_1, A + \tau]$, $M = 2R$ y L la correspondiente constante de Lipschitz. Si elegimos C y δ como en la demostración del teorema de existencia, podemos definir una función y como la única solución del problema que satisface la condición inicial $y_{t_n} = y_{t_n}$. Para n suficientemente grande, y está definida por lo menos hasta el valor $t_n + \delta > A$; además, por unicidad resulta que $y = x$ para $t \geq t_n$, lo que es absurdo.

□

Como consecuencia, las las soluciones de ecuaciones lineales están globalmente definidas en el intervalo $[-\tau, +\infty)$. Más en general, esto ocurre si f tiene crecimiento lineal respecto de x, vale decir

$$|f(t, \varphi)| \leq a(t)\|\varphi\|_\infty + b(t)$$

para ciertas a, b continuas.

Volviendo a los retardos discretos, cabe mencionar que todos estos resultados se consiguen con una condición más débil: de acuerdo con el método de pasos, la condición de Lipschitz o de crecimiento lineal solo hacen falta para las variables que no incluye retardos. Por ejemplo, un problema del estilo

$$x'(t) = a(t)x(t) + g(x(t - \tau_1), \ldots, x(t - \tau_K))$$

con $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^K \to \mathbb{R}^n$ continuas, tiene solución globalmente definida para cualquier dato inicial.

Para concluir, un par de ejercicios para despuntar el vicio:

Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ continua y decreciente y sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{T\to\infty} \int_0^T a(s)\, ds = +\infty$.

   Para el problema $x'(t) = -a(t)x(t) + f(x(t - \tau))$, probar:

(a) Las soluciones con condición inicial $\phi : [t_0 - \tau, 0] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ están globalmente definidas y son estrictamente positivas para $t > 0$.

(b) Si x e y son soluciones tales que $x(t) \geq y(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$ entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) - y(t) = 0$. *Sugerencia*: si $z(t) := x(t) - y(t)$ entonces $z'(t) + a(t)z(t) \leq 0$ para $t \geq t_0 + \tau$. En consecuencia, $v(t) := e^{A(t)}z(t)$, donde A es una primitiva de a, es decreciente.

(c) Si el problema admite alguna solución T-periódica, entonces a es T-periódica.

(d) Dos soluciones positivas T-periódicas se cruzan al menos dos veces en cada período.

(e) Supongamos que $a(t) \geq 0$ para todo t. Si x e y son dos soluciones positivas, entonces existe t_0 tal que $|x(t) - y(t)| \leq \tau f(0)$ para todo $t \geq t_0$. *Sugerencia*: Si t_0 y t_1 son ceros consecutivos de $z := x - y$ tales que $t_1 > t_0 + \tau$ entonces

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} |z(t)| = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau} |z(t)|.$$

Por otro lado, si $z > 0$ en $(t_0, t_0+\tau)$ entonces $z' + az < f(0)$. Deducir que

$$z(t) \leq f(0) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t a(r)\,dr}\, ds \leq (t - t_0) f(0).$$

2. Para la ecuación de Nicholson $x'(t) = -dx(t) + px(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}$, probar:

(a) Las soluciones con condición inicial positiva están globalmente definidas y son positivas.

(b) Si x es solución, entonces existe t_0 tal que $x(t) \leq \frac{p}{de}$ para todo $t \geq t_0$.

(c) Si $p > de$, deducir del ejercicio previo que si x es una solución tal que $x(t) \geq 1$ para $t \gg 0$ entonces x oscila alrededor del equilibrio $x^* = \ln \frac{p}{d}$ o bien $x(t) \to x^*$ para $t \to +\infty$.